NAME :

ENT305A: Exam

Exercise 1 (Un problème sous contraintes)**.** Pour $c \in \mathbb{R}^n$, on considère le problème

$$\begin{aligned} \min_{s.c.} \, &(c, x) \\ &\|x\|_2 \leq 1, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Notation : pour $z \in \mathbb{R}^n$, on écrira $z^- \in \mathbb{R}^n$ défini pour $i \in \{1, ...n\}$ par $(z^-)_i = \begin{cases} z_i, & \text{si } z_i < 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que le problème est bien posé, et en donner un minimiseur global évident si $c \geq 0$.

L'ensemble des contraintes $C := \{x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0, \|x\|^2 \leq 1\}$ est manifestement borné puisqu'il est inclus dans la boule unité fermée. Il est aussi fermé dans $\mathbb{R}^n$ par continuité des fonctions. Il est donc compact, et comme la fonction objectif est continue, le problème est bien posé.

Dans le cas de figure où $c \geq 0$, on a $(c, x) \geq 0$ pour tout $x \in C$. Or en $x = 0 \in C$, la fonction objectif prend la valeur 0 : c'est donc que 0 est un minimiseur global du problème.

On suppose dans toute la suite qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots n\}$ tel que $c_{i_0} < 0$.

2. $\|x\|_2$ n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Mettre le problème d'optimisation (1) sous forme équivalente (2), avec $n + 1$ contraintes d'inégalité différentiables sur $\mathbb{R}^n$, notées $f_0, f_1, ...f_n$, où f_0 est associée à la contrainte $\|x\|^2 \leq 1$ (utiliser des inégalités "plus petites ou égales").

On écrit simplement

$$\begin{aligned} \min_{s.c.} \, &(c, x) \\ &\|x\|_2^2 - 1 \leq 0, \\ &- x_i \leq 0, i \in \{1, ...n\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Les fonctions associées sont donc $f_0 : x \mapsto \|x\|_2^2 - 1$ et $f_i : x \mapsto -x_i, i \in \{1, \ldots n\}$, qui sont bien entendu régulières sur R^n.

3. Sous quelles conditions une solution locale de (1) vérifie nécessairement les conditions KKT?

Rappeler les conditions LICQ sur les contraintes d'inégalités actives.
Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\nabla f_0(x) = 2x$, $\nabla f_i(x) = -e_i$, $i \in \{1, \ldots n\}$, où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

4. On suppose les conditions LICQ satisfaites. Soit x un minimiseur global du problème.

(a) Montrer qu'il existe $\lambda_0 \geq 0, \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n+$ tels que

$$\lambda_0(\|x\|^2 - 1) = 0, \forall i \in \{1, \ldots n\}, \ \lambda_i x_i = 0, \ c + 2\lambda_0 x - \lambda = 0.$$

D'après ce qui précède, un minimiseur global satisfait les conditions de KKT. Les deux premières conditions demandées sont les conditions de complémentarité. La dernière condition demandée correspond à la condition de stationnarité puisque

$$\nabla f(x) + \lambda_0 \nabla f_0(x) + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \nabla f_i(x) = c + 2\lambda_0 x - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i = c + 2\lambda_0 x - \lambda = 0.$$

(b) Justifier que $\lambda_0 > 0$.

Si on avait $\lambda_0 = 0$, on trouverait $c = \lambda - 2\lambda_0 x = \lambda \geq 0$, contredisant l'hypothèse faite sur c.

(c) Démontrer que

$$x = \frac{c^-}{\|c^-\|_2}$$

Comme $x \geq 0$, on doit avoir $\lambda \geq c$ (par stationarité).
On distingue désormais selon le signe de c_i pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si $c_i < 0$, on a $x_i > \frac{\lambda_i}{2\lambda_0} \geq 0$ (par stationarité). Ainsi $\lambda_i = 0$ (2eme complémentarité) et donc $x_i = -\frac{c_i}{2\lambda_0}$.
Si $c_i = 0$, $x_i = \frac{\lambda_i}{2\lambda_0}$ et donc 2eme condition de compl.: $x_i = \lambda_i = 0$.

Enfin,si $c_i > 0$, pour satisfaire la condition de positivité de x, on a nécessairement: $\lambda_i \geq c_i > 0$, et donc $x_i = 0$ (2e cond).
Finalement, $x = \frac{c^-}{2\lambda_0}$
Par ailleurs, $\lambda_0 > 0$ impose $\|x\|_2 = 1$, ce qui achève de montrer la formule demandée.