

NAME :

---

**ENT305A: Exam**

24/10/2025

Elise Grosjean, ENSTA-Paris

Les réponses peuvent être écrites en français ou en anglais.

**Exercice 1** (Rappels de cours).

- Rappeler le théorème de Weierstrass.
- Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^n$  et soit  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\nabla f(x) = 0$ . Énoncer une condition suffisante pour que  $x$  soit une solution locale du problème de minimisation :  $\inf_{\mathbb{R}^n} f(x)$ .

**Exercice 2** (Conditions KKT). On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_1^2 - 4x_1 + 2x_2^2 - 8x_2.$$

1. Pour cette question, on ne considère que la contrainte d'égalité

$$(x_1 + x_2^2) - 3 = 0.$$

Écrire la formule du lagrangien augmenté  $L_c$  associé.

2. On modifie maintenant les contraintes ; le problème devient

$$\inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} (x_1 + x_2^2) - 3 \leq -y, \\ x_2 \leq 1 + \frac{1}{2}x_1, \\ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

où  $y \in \mathbb{R}$  est un paramètre. On impose d'abord  $y = 0$  (jusqu'à la question 5). Prouver l'existence d'une solution.

3. Écrire les conditions KKT. Vérifier que le point  $(2, 1)$  est réalisable et qu'il satisfait ces conditions.
4. Rappeler la condition LICQ sur les contraintes d'inégalités actives (il n'y a pas de contrainte d'égalité ici). Le point  $(2, 1)$  vérifie-t-il ces conditions ?
5. Le point  $(2, 1)$  est-il une solution globale du problème ?
6. Le paramètre  $y$  peut désormais prendre n'importe quelle valeur réelle. Quelle variation du coût optimal engendre une variation  $\delta y$  du paramètre ?

**Exercice 3** (Pseudo-code). Écrire en pseudo-code un algorithme de descente de gradient.

Bonus: Ajouter une règle d'Armijo pour le calcul du pas.

**Exercice 4.** On considère dans  $\mathbb{R}^2$  l'ensemble

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 \leq 1 \text{ et } x_2^2 \leq 1\}.$$

1. Quelle est la forme géométrique de  $C$  ?
2. On note  $g_1$  la contrainte associée à  $x_1$  et  $g_2$  celle associée à  $x_2$ . Calculer  $\nabla^2 g_1$  et  $\nabla^2 g_2$ . Montrer que  $C$  est convexe et fermé.
3. Soient  $A$  une matrice réelle  $2 \times 2$  inversible, et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ . On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2,$$

et le problème

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in C, \tag{P}$$

4. Montrer que (P) admet une unique solution.
5. On cherche maintenant à déterminer le minimum de  $f$  sur  $C$  dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Trouver la solution du problème (P) sans contrainte. Ce point est-il réalisable?
  - On suppose que la contrainte violée est active au point optimal. Écrire les conditions KKT.
  - Résoudre le système obtenu en supposant  $|x_2| < 1$ . Les conditions KKT sont-elles satisfaites dans ce cas?
  - Même question avec  $|x_2| = 1$ .
  - Conclure: Quel est la solution au problème de minimisation sous contraintes (P)?
6. Bonus: Écrire en pseudo-code l'algorithme du gradient projeté associé à (P).

**Exercice 5** (Modélisation & optimisation). Une entreprise livre du gaz sur  $T = 2$  périodes ( $t = 1, 2$ ) à  $M = 2$  districts ( $j = 1, 2$ ) depuis un unique site d'extraction ( $N = 1$ ). Il existe  $K = 2$  connexions autorisées : le site peut envoyer vers les districts 1 et 2 (pas d'autres liaisons).

L'entreprise dispose d'un réservoir (sans pertes) de capacité  $S_{\max}$ . On suppose que le niveau initial et final du réservoir sont nuls :  $s(0) = s(2) = 0$ .

Le coût de production au temps  $t$  est  $a x(t)^2 + b x(t)$ .

Les variables de décision sont :

- $x(t)$  : production au site à la période  $t$ ,
- $z_1(t), z_2(t)$  : flux envoyés du site vers les districts 1 et 2 à la période  $t$ ,
- $y(t)$  : flux envoyés du site vers le réservoir à la période  $t$ ,
- $u_1(t), u_2(t)$  : flux envoyés du réservoir vers les districts 1 et 2 à la période  $t$ ,
- $s(t)$  : niveau du réservoir *en fin* de période  $t$ .

Les demandes  $D(t, j)$  doivent être satisfaites à chaque période et district. Les paramètres sont :

|                 |           |          |         |
|-----------------|-----------|----------|---------|
|                 | $D(t, j)$ | $t = 1$  | $t = 2$ |
| $S_{\max} = 1,$ | $a = 2,$  | $b = 1,$ |         |
|                 | $j = 1$   | 1        | 0       |
|                 | $j = 2$   | 1        | 1       |

1. Écrire le problème d'optimisation qui *minimise le coût total de production*.

*Indications* . Les contraintes d'équilibre aux sites et du réservoir doivent être modélisées et la demande doit bien sûr être satisfaite.

2. Quel algorithme pourrait résoudre ce problème? Expliquer pourquoi.